

کد کنترل

308

F

## آزمون (نیمه‌متمرکز) ورود به دوره‌های دکتری - سال ۱۴۰۱

دفترچه شماره (۱)

صبح جمعه ۱۴۰۰/۱۲/۶



«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»

امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

### رشته مهندسی مکانیک - دینامیک، کنترل و ارتعاشات (کد ۲۳۲۳)

جدول مواد امتحانی، تعداد، شماره سؤال‌ها و زمان پاسخ‌گویی

زمان پاسخ‌گویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی
۱۵۰ دقیقه	۴۵	۱	۴۵	مجموعه دروس تخصصی: - ریاضیات مهندسی - دینامیک پیشرفته - ارتعاشات پیشرفته - کنترل پیشرفته

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤال‌ها به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و یا متخلفان برابر مقررات رفتار می‌شود.

\* متقاضی گرامی، وارد نکردن مشخصات و امضا در کادر زیر، به منزله غیبت و حضور نداشتن در جلسه آزمون است.

اینجانب ..... با شماره داوطلبی ..... با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود را با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخ‌نامه و دفترچه سؤال‌ها، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچه سؤال‌ها و پایین پاسخ‌نامه‌ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

۱- اگر  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ ، آنگاه بسط لوران  $f$  در حوزه  $|z| > 2$  حول مبدأ مختصات کدام است؟

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{1}{z^n} \quad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{1}{z^{n+1}} \quad (3)$$

$$-\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}\right) \quad (4)$$

۲- کدام تبدیل  $w = u + iv$ ، دایره‌ای به معادله  $x^2 + y^2 + 6\frac{1+r^2}{1-r^2}x + 9 = 0$  را روی دایره‌ای به معادله  $u^2 + v^2 = r^2$  می‌نگارد؟

$$w = \frac{z-3}{z+3} \quad (1)$$

$$w = \frac{z+3}{z-3} \quad (2)$$

$$w = 2\frac{z-3}{z+3} \quad (3)$$

$$w = 2\frac{z+3}{z-3} \quad (4)$$

۳- تابع  $u(x,y) = 3xy^2 - x^3$ ، بخش حقیقی تابع تحلیلی  $f(z) = u + iv$  است. مقدار  $f'(i)$  و  $f''(i)$  به ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟

$$(1) -6i \text{ و } -3$$

$$(2) 6i \text{ و } -3$$

$$(3) -6i \text{ و } 3$$

$$(4) 6i \text{ و } 3$$

۴- اگر  $u(x, t)$  جواب معادله  $\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \sin x + \sin 3x & 0 < x < \pi \end{cases}$  باشد، مقدار  $u(\frac{\pi}{4}, 1)$ ، کدام است؟

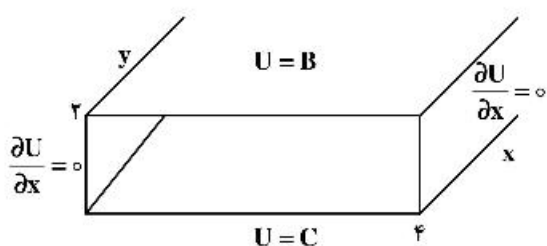
$$\frac{e^{\frac{1}{4}} + 1}{e^{\frac{1}{2}}} \quad (1)$$

$$\frac{e^{\frac{1}{2}} - 1}{e^{\frac{1}{4}}} \quad (2)$$

$$\frac{e^{\frac{1}{4}} + 1}{e^{\frac{1}{2}}} \quad (3)$$

$$\frac{e^{\frac{1}{2}} - 1}{e^{\frac{1}{4}}} \quad (4)$$

۵- پاسخ معادله لاپلاس در داخل تونل شکل زیر، برای  $B = \begin{cases} V_0 & 0 < x < 2 \\ 0 & 2 < x < 4 \end{cases}$  و  $C = 0$ ، کدام است؟



$$U(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4V_0 \sin(\frac{m\pi}{2})}{m\pi \sinh(\frac{m\pi}{2})} \cos(\frac{m\pi}{4}x) \sinh(\frac{m\pi}{4}y) \quad (1)$$

$$U(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2V_0 \sin(\frac{m\pi}{2})}{m\pi \sinh(\frac{m\pi}{2})} \cos(\frac{m\pi}{4}x) \sinh(\frac{m\pi}{4}y) \quad (2)$$

$$U(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{V_0 \sin(\frac{m\pi}{2})}{2m\pi \sinh(\frac{m\pi}{2})} \cos(\frac{m\pi}{4}x) \sinh(\frac{m\pi}{4}y) \quad (3)$$

$$U(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{V_0 \sin(\frac{m\pi}{2})}{4m\pi \sinh(\frac{m\pi}{2})} \sin(\frac{m\pi}{4}x) \sinh(\frac{m\pi}{4}y) \quad (4)$$

۶- با استفاده از قضیه مانده‌ها حاصل انتگرال  $\oint_{|z|=1} z^m e^z dz$  ، کدام است؟

$$\frac{\pi i}{(m+1)!} \quad (1)$$

$$\frac{2\pi i}{m!} \quad (2)$$

$$\frac{2\pi i}{(m+1)!} \quad (3)$$

$$\frac{\pi i}{m!} \quad (4)$$

۷- حاصل انتگرال کوشی  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 2} dx$  ، کدام است؟

$$\frac{\pi}{2e} (\sin 1 - \cos 1) \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2e} (\cos 1 + \sin 1) \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{e} (\sin 1 - \cos 1) \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{e} (\sin 1 + \cos 1) \quad (4)$$

۸- حاصل عبارت  $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{1+z+z^2+z^3}$  ، کدام است؟

$$-\pi i \quad (1)$$

$$-\frac{\pi}{2} i \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (3)$$

$$\pi i \quad (4)$$

۹- اگر بسط فوریه تابع  $f(x) = \sin \alpha x$  برای  $-\pi < x < \pi$  که  $\alpha$  عدد غیر صحیح است، به صورت

$$f(x) = \frac{2 \sin(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n-1}}{n^2 - \alpha^2} \sin(nx)$$

باشد، در این صورت دنباله  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(16n^2 - 1)^2}$  ، با استفاده از قضیه پارسوال کدام است؟

$$\frac{\pi^2 - 2\pi}{512} \quad (1)$$

$$\frac{\pi^2 + 2\pi}{256} \quad (2)$$

$$\frac{\pi^2 - 2\pi}{128} \quad (3)$$

$$\frac{\pi^2 - \pi}{512} \quad (4)$$

۱۰- فرض کنیم  $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$  سری فوریه مثلثاتی تابع  $f(x) = (2 \sin x - 3 \cos x)^2$  روی

بازه  $[-\pi, \pi]$  باشد، در این صورت، مقدار  $a_0 \times b_7$ ، کدام است؟

(۱) -۱۵

(۲) -۲۷

(۳) -۳۶

(۴) -۳۹

۱۱- اگر  $\int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega x}{\omega^2 + k^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-kx}$  باشد، حاصل عبارت  $\int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega x}{\omega^2 + 64} d\omega$ ، کدام است؟

(راهنمایی:  $\sin \alpha x = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x})$ )

(۱)  $\frac{\pi}{16} e^{-2x} \sin 2x$

(۲)  $\frac{\pi}{16} e^{-2x} \cos 2x$

(۳)  $\frac{\pi}{4} e^{-x} \sin x$

(۴)  $\frac{\pi}{4} e^{-x} \cos x$

۱۲- فرض کنید  $\ln$  شاخه اصلی لگاریتم است. در این صورت حاصل انتگرال  $\oint_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{\ln(z)}{(z+i)^3} dz$ ، کدام است؟

(۱)  $-\pi$

(۲)  $\pi i$

(۳)  $-2\pi$

(۴)  $2\pi i$

۱۳- اگر ناحیه  $|z|=2$  را تحت رابطه  $w = z + \frac{2}{z}$ ، نگاشت کنیم، مساحت ناحیه نگاشت شده چقدر است؟

(۱)  $2\pi$

(۲)  $3\pi$

(۳)  $4\pi$

(۴)  $6\pi$

۱۴- اگر برای  $0 < x < \pi$  داشته باشیم:  $x = \frac{4}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} - \dots \right)$ ، در این صورت ضریب جمله

$\cos \pi x$ ، در بسط عبارت  $x^2 - x$ ، کدام است؟

$$\frac{16}{\pi^2} \quad (1)$$

$$\frac{8}{\pi^2} \quad (2)$$

$$\frac{4}{\pi^2} \quad (3)$$

$$\frac{2}{\pi^2} \quad (4)$$

۱۵- جواب معادله دیفرانسیل مشتقات نسبی  $U_{tt} = U_{xx}$ ،  $U(0, t) = U(\pi, t) = U(x, 0) = 0$ ،  $U_t(x, 0) = k \sin 3x - \frac{k}{2} \sin 6x$ ، کدام است؟

$$U(x, t) = \frac{k}{3} \sin 3t \sin 3x - \frac{k}{12} \sin 6t \sin 6x \quad (1)$$

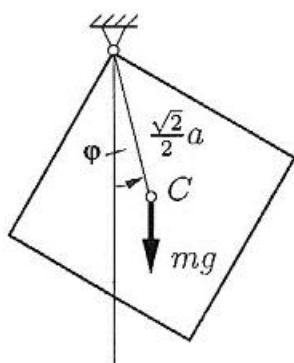
$$U(x, t) = \frac{k}{4} \sin 4t \sin 3x - \frac{k}{12} \sin 6t \sin 6x \quad (2)$$

$$U(x, t) = \frac{k}{3} \sin 3t \sin 3x - \frac{k}{4} \sin 2t \sin 6x \quad (3)$$

$$U(x, t) = \frac{k}{9} \sin 9t \sin 3x - \frac{k}{12} \sin 6t \sin 6x \quad (4)$$

۱۶- مربع شکل زیر که در صفحه قائم آویزان شده در صورتی که طول هر ضلع مربع  $a$  باشد و ممان اینرسی مربع حول

محور عمود بر آن در مرکز مربع  $\frac{1}{6} ma^2$  باشد، مقدار شتاب زاویه‌ای مربع بر حسب زاویه  $\phi$  کدام است؟



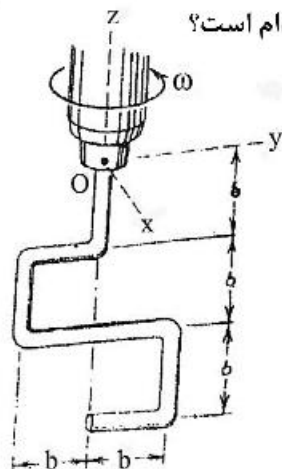
$$\frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{g}{a} \sin \phi \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{g}{a} \sin \phi \quad (2)$$

$$3\sqrt{2} \frac{g}{a} \sin \phi \quad (3)$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{g}{a} \sin \phi \quad (4)$$

۱۷- همزن نشان داده شده از میله‌ای به طول  $\sqrt{b}$  و جرم بر واحد طول  $\rho$  ساخته شده است. این همزن با سرعت زاویه ای ثابت  $\omega$  حول محور  $Z$  می‌چرخد. مقدار گشتاور خمشی میله در پایه  $O$  سه نظام کدام است؟



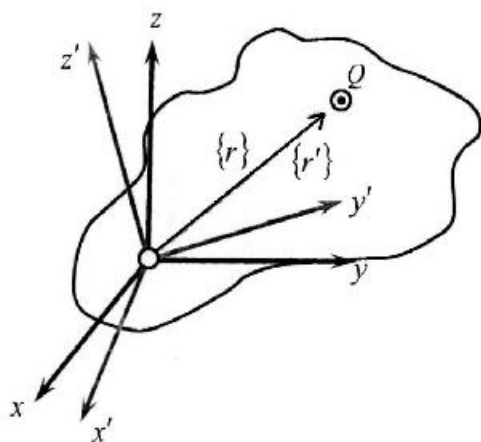
$$\rho b^3 \frac{\omega^2}{2} \quad (1)$$

$$\rho b^3 \omega^2 \quad (2)$$

$$2\rho b^3 \omega^2 \quad (3)$$

$$3\rho b^3 \omega^2 \quad (4)$$

۱۸- اگر ماتریس ممان اینرسی یک جسم در دستگاه مختصات  $xyz$  را با نماد  $[I]$  و ماتریس ممان اینرسی همین جسم در دستگاه مختصات دوران یافته  $x'y'z'$  با نماد  $[I']$  نمایش دهیم، آنگاه چه ارتباطی میان این دو ماتریس ممان اینرسی وجود دارد؟ (توجه: موقعیت ذره ماده  $Q$  از منظر دستگاه  $xyz$  با برداری موقعیت  $\{r\}$  و موقعیت همین ذره از دیدگاه دستگاه  $x'y'z'$  با بردار  $\{r'\}$  توصیف می‌گردد. با استفاده از ماتریس کسینوس‌های هادی  $[C]$  و یا ماتریس دوران  $[R]$ ، این دو بردار موقعیت از منظر دستگاه‌های  $xyz$  و  $x'y'z'$ ، به طریق  $\{r'\} = [C]^T \{r\}$  و یا  $\{r'\} = [R] \{r\}$  به هم ارتباط می‌یابند.)



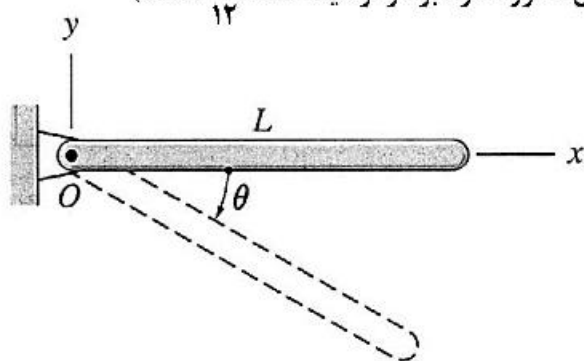
$$[I'] = [R][I][R]^T \quad (1)$$

$$[I] = [R][I'][R]^T \quad (2)$$

$$[I] = [C]^T [I'] [C] \quad (3)$$

$$[I'] = [C][I][C]^T \quad (4)$$

۱۹- میله یکنواختی مطابق شکل از وضعیت افقی از حالت سکون رها می‌شود. مؤلفه نیروی عکس‌العمل  $O$  عمود بر میله برحسب زاویه  $\theta$  کدام است؟ (ممان اینرسی میله حول محور عمود بر مرکز میله  $\frac{1}{12} mL^2$  است.)



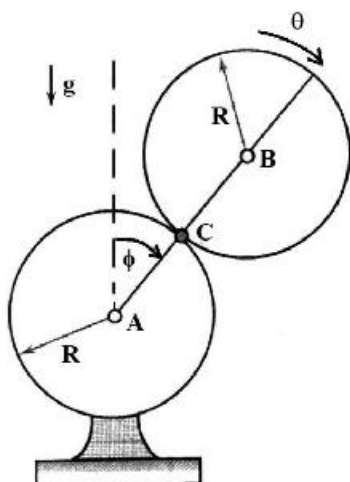
$$\frac{mg}{4} \sin \theta \quad (1)$$

$$\frac{mg}{4} \cos \theta \quad (2)$$

$$\frac{2mg}{3} \sin \theta \quad (3)$$

$$\frac{3mg}{4} \cos \theta \quad (4)$$

۲۰- کره یکنواخت توپری به جرم  $m$  و شعاع  $R$  بر روی کره ثابتی با همان شعاع شروع به حرکت می‌کند. با فرض حرکت غلتشی، کدام گزینه درست است؟



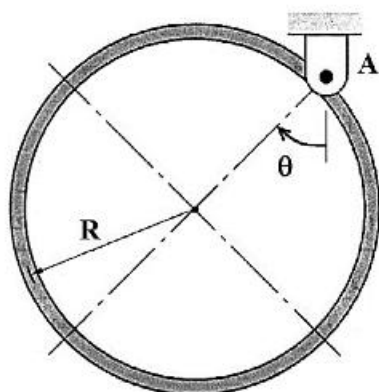
$$T = \frac{1}{2} I_C \dot{\phi}^2 \quad (1)$$

$$T = \frac{1}{2} I_B \dot{\theta}^2 \quad (2)$$

$$T = \frac{1}{2} I_B \dot{\phi}^2 \quad (3)$$

$$T = 2 I_C \dot{\phi}^2 \quad (4)$$

۲۱- حلقه یکنواختی مطابق شکل از لولای A آویزان شده است. در صورتی که مماس اینرسی حلقه حول محور عمود بر مرکز آن  $mR^2$  باشد، شتاب زاویه‌ای حلقه بر حسب  $\theta$  کدام است؟



$$-\frac{g}{2R} \cos \theta \quad (1)$$

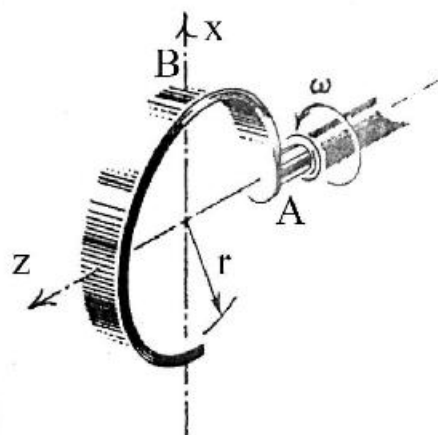
$$-\frac{g}{R} \sin \theta \quad (2)$$

$$-\frac{g}{2R} \sin \theta \quad (3)$$

$$-\frac{g}{R} \cos \theta \quad (4)$$

۲۲- حلقه ناقص نشان داده شده در شکل دارای جرم بر واحد طول  $\rho$  بوده و در نقطه A به محور جوش شده است. گشتاور خمشی M در نقطه A از حلقه بر اثر دوران آن با سرعت زاویه‌ای ثابت  $\omega$ ، در کدام گزینه درست است؟

$$\left( I_{xz} = -\frac{\rho r^3}{2} \right)$$



$$\rho r^3 \omega^2 \quad (1)$$

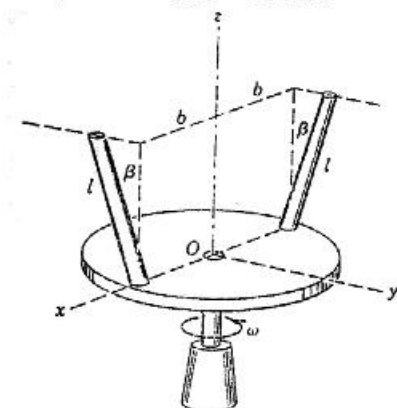
$$\frac{1}{4} \rho r^3 \omega^2 \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \rho r^3 \omega^2 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \rho r^3 \omega^2 \quad (4)$$



۲۳- هر یک از میله‌های باریک به طول  $l$  و جرم  $m$  به دیسک مدوری که حول محور قائم  $Z$  با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  دوران می‌کند، جوش شده است. هر یک از میله‌ها با امتداد قائم زاویه  $\beta$  ساخته و صفحه  $yz$  موازی صفحه  $xy$  است.



عبارت  $\vec{H}_O$  مومنتم زاویه‌ای دو میله حول مبدأ مختصات O کدام است؟

$$\frac{2}{3}m \left( \frac{1}{3}l^2 \sin^2 \beta + b^2 \right) \omega \vec{K} \quad (1)$$

$$m \left( l^2 \sin^2 \beta + b^2 \right) \omega \vec{K} \quad (2)$$

$$\frac{2}{3}m \left( \frac{1}{3}l^2 \sin^2 \beta + 2b^2 \right) \omega \vec{K} \quad (3)$$

$$\frac{2}{3}m \left( l^2 \sin^2 \beta + b^2 \right) \omega \vec{K} \quad (4)$$

۲۴- لغزنده‌ای به جرم  $m$  می‌تواند بدون اصطکاک بر روی حلقه دایره‌ای به شعاع  $R$  حرکت کند. حلقه دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت  $\Omega$  حول محوری که از مرکز آن می‌گذرد دوران می‌کند. اندازه حرکت تعمیم یافته متناظر با مختصات

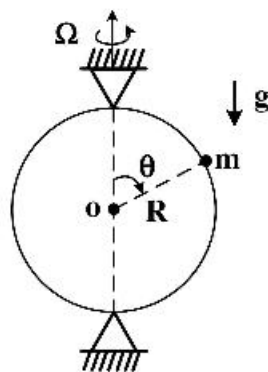
تعمیم یافته  $\theta$  کدام است؟

$$mR^2 \Omega^2 \cos \theta \quad (1)$$

$$mR^2 \dot{\theta} \quad (2)$$

$$mR^2 \Omega^2 \sin \theta \quad (3)$$

$$mR^2 \Omega^2 \sin \theta \cos \theta + mgR \sin \theta \quad (4)$$



۲۵- معادله قیدی زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{i=1}^n A_i \dot{x}_i + B = 0 \quad \text{و} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

در چه شرایطی قیود هولونومیک خواهند بود؟

$$A_i = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (1)$$

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (2)$$

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3)$$

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (4)$$

۲۶- معادله ارتعاشی یک سیستم دو درجه آزادی استهلاکی به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

فرکانس‌های طبیعی این سیستم تقریباً برابرند با  $\omega_1 = 0.45 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  و  $\omega_2 = 1.95 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ، نسبت‌های استهلاک

(میرایی) در مدهای اول و دوم کدام است؟

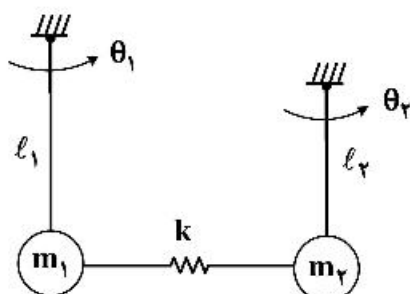
$$\zeta_1 = 0.33, \zeta_2 = 0.87 \quad (1)$$

$$\zeta_1 = 0.54, \zeta_2 = 0.83 \quad (2)$$

$$\zeta_1 = 0.78, \zeta_2 = 1.1 \quad (3)$$

$$\zeta_1 = 0.72, \zeta_2 = 1.53 \quad (4)$$

۲۷- یکی از دو فرکانس طبیعی سیستم زیر با  $\omega$  نشان داده می‌شود. نسبت دامنه  $\frac{\theta_2}{\theta_1}$ ، مرتبط با آن کدام است؟



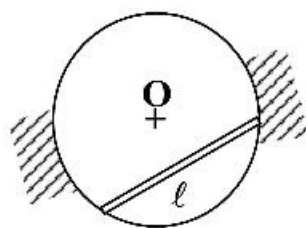
$$\frac{-\omega^2 m_2 l_2^2 + m_2 g l_2 + k l_2^2}{k l_1 l_2} \quad (1)$$

$$\frac{-\omega^2 m_1 l_1^2 + m_1 g l_1 + k l_1^2}{k l_1 l_2} \quad (2)$$

$$\frac{-\omega^2 m_1 l_1^2 + k l_1^2}{k l_1 l_2} \quad (3)$$

$$\frac{-\omega^2 m_2 l_2^2 + k l_2^2}{k l_1 l_2} \quad (4)$$

۲۸- میله همگن به طول  $l = \frac{2R}{\gamma}$  و جرم  $m$  داخل استوانه‌ای به شعاع  $R$  بدون اصطکاک نوسان می‌کند. فرکانس طبیعی



آن کدام است؟ ( $I = \frac{ml^2}{12}$  میله)

$$\frac{2\sqrt{7}g}{5R} \quad (1)$$

$$\frac{2g}{3R} \quad (2)$$

$$\frac{4\sqrt{7}g}{7R} \quad (3)$$

$$\frac{4g\sqrt{7}}{3R} \quad (4)$$

۲۹- جرم  $m = 1 \text{ kg}$  به فنری مطابق شکل با سختی  $100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  متصل است و بر روی سطحی با ضریب اصطکاک  $\mu = 0.1$  قرار

گرفته است. انتهای راست فنر (نقطه A) با سرعت ثابت  $V_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  شروع به حرکت می‌کند. در صورتی که سیستم

در لحظه  $t = 0$  در حال سکون باشد، ضابطه حرکت جرم کدام است؟

$$m = 1 \text{ kg}$$

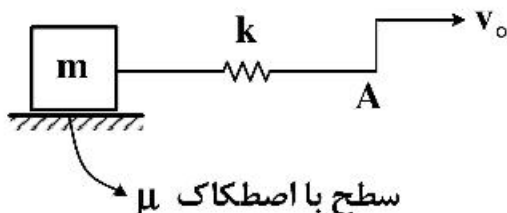
$$k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$V_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\mu = 0.1$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



$$x(t) = 0.01(\cos 100t - 1) + 2(t - 0.1 \sin 100t) \quad (1)$$

$$x(t) = 0.01(\cos 100t - 1) + 2(t - 0.1 \sin 100t) \quad (2)$$

$$x(t) = 0.1(\cos 100t - 1) + 2(t - 0.01 \sin 100t) \quad (3)$$

$$x(t) = 0.01(1 - \cos 100t) + 2(t - 0.1 \sin 100t) \quad (4)$$

۳۰- برای اندازه‌گیری فرکانس طبیعی اول ارتعاشات عرضی یک تیر، نوسانگری به جرم  $1 \text{ kg}$  به انتهای آن نصب و فرکانس  $100 \text{ Hz}$  به دست آمده است. با اضافه کردن یک جرم  $1 \text{ kg}$  دیگر در همان محل، فرکانس طبیعی مجموعه به  $95 \text{ Hz}$

کاهش یافته است. فرکانس طبیعی اول مجموعه اصلی تقریباً چند هرتز است؟

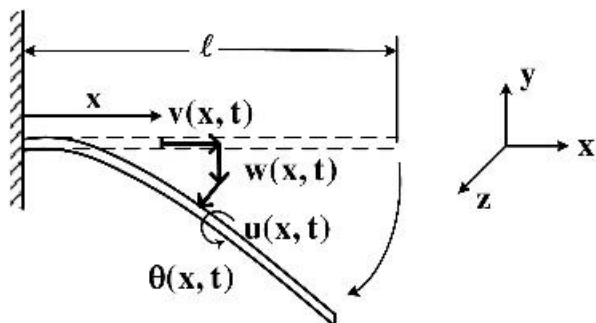
$$91 \quad (1)$$

$$97.5 \quad (2)$$

$$106 \quad (3)$$

$$111 \quad (4)$$

۳۱- انرژی کرنشی الاستیک خطی در اثر خمش، پیچش و حرکت محوری طبق شکل برای تیری که هندسه و جنس در امتداد محور یکنواخت است، کدام است؟



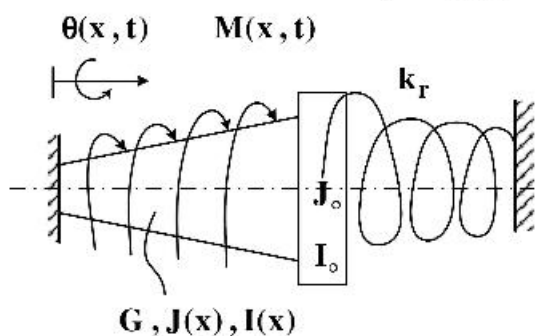
$$\frac{1}{2}EI \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2}EI \int_0^l \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{1}{2}EA \int_0^l \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{1}{2}GJ \int_0^l \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 dx \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}EI \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \frac{1}{2}EI \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \frac{1}{2}EA \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2}GJ \int_0^l \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 dx \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}EI \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2}EI \int_0^l \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{1}{2}EA \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2}GJ \int_0^l \frac{\partial \theta}{\partial x} dx \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}EI \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}EI \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}EA \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2}GJ \int_0^l \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 dx \quad (4)$$

۳۲- معادله حرکت برای ارتعاشات پیچشی شفت نشان داده شده در شکل زیر، کدام است؟



$$\frac{\partial}{\partial x} \left( GJ(x) \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right) + M(x,t) = I(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (1)$$

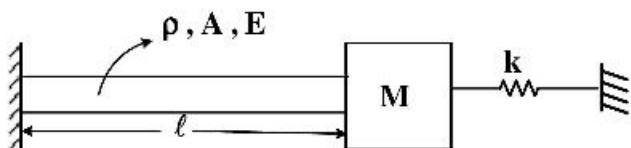
$$GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + M(x,t) = I(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( GJ(x) \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right) + M(x,t) = I(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + I(x) \frac{\partial^2 \theta(\ell,t)}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( GJ(x) \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right) + M(x,t) = I(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + I(x) \frac{\partial^2 \theta(\ell,t)}{\partial t^2} + k_r \theta(\ell,t) \quad (4)$$

۳۳- میله شکل زیر را که تحت ارتعاشات طولی است در نظر بگیرید. انتهای آن به یک جرم  $M$  و سختی  $k$  متصل است. اگر چگالی،

سطح مقطع و مدول الاستیسیته میله به ترتیب  $\rho$ ،  $A$  و  $E$  باشند، معادله فرکانسی سیستم کدام است؟  $\left( C = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \right)$



$$\tan \frac{\omega \ell}{C} = \frac{(M\omega^2 - k)C^2}{AE\omega C} \quad (1)$$

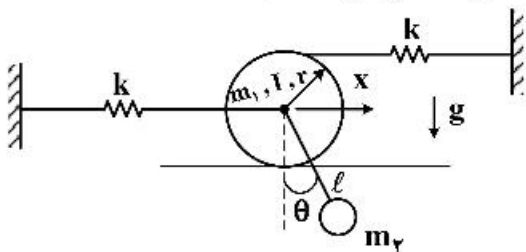
$$\tan \frac{\omega \ell}{C} = \frac{(M\omega^2 - kC^2)}{AE\omega C} \quad (2)$$

$$\tan \frac{\omega \ell}{C} = \frac{AE\omega C}{M\omega^2 - kC^2} \quad (3)$$

$$\tan \frac{\omega \ell}{C} = \frac{AE\omega C}{(M\omega^2 - k)C^2} \quad (4)$$

۳۴- معادلات حرکت سیستم زیر در صورتی که حرکت چرخ بر روی زمین غلتش کامل و زاویه  $\theta$  کوچک باشد و از ترم‌های

غیرخطی صرف نظر شود، کدام است؟ ( $I$  ممان اینرسی چرخ حول محور هندسی آن است.)



$$\begin{cases} \left( m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2} \right) \ddot{x} + m_2 \ell \ddot{\theta} + \Delta kx = 0 \\ m_2 \ell (\ddot{x} + \ell \ddot{\theta}) + m_2 g \ell \theta = 0 \end{cases} \quad (1)$$

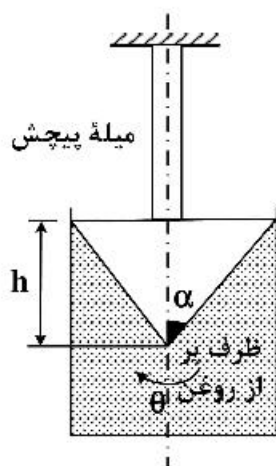
$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 \ell \ddot{\theta} + \tau kx = 0 \\ m_2 \ell (\ddot{x} + \ell \ddot{\theta}) + m_2 g \ell \theta = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x} + m_2 \ell \ddot{\theta} + \Delta kx = 0 \\ m_2 \ell \ddot{\theta} + m_2 g \ell \theta = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \left( m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2} \right) \ddot{x} + m_2 \ell \ddot{\theta} + \tau kx = 0 \\ m_2 \ell (\tau \ddot{x} + \ell \ddot{\theta}) + \tau m_2 g \ell \theta = 0 \end{cases} \quad (4)$$

۳۵- یک مخروط به انتهای میله پیچش طبق شکل متصل شده و کل سطح جانبی آن در روغن با ویسکوزیته  $\mu$  قرار

دارد. گشتاور استهلاکی وارد بر مخروط از طرف روغن کدام است؟



$$\frac{1}{3} \pi \mu \frac{\tan^2 \alpha}{\cos \alpha} h^2 \dot{\theta} \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \pi \mu \frac{\tan^2 \alpha}{\cos \alpha} h^2 \dot{\theta} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \pi \mu \frac{\tan^2 \alpha}{\sin \alpha} h^2 \dot{\theta} \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \pi \mu \frac{\tan^2 \alpha}{\sin \alpha} h^2 \dot{\theta} \quad (4)$$

۳۶- سیستم زیر را در نظر بگیرید. اگر پاسخ سیستم با شرایط اولیه  $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، به ورودی پله واحد به صورت

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

باشد، کدام عبارت در مورد این سیستم درست است؟

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + Bu$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

(۱) سیستم مشاهده‌پذیر و کنترل‌پذیر است.

(۲) سیستم مشاهده‌پذیر و کنترل‌پذیر نیست.

(۳) سیستم مشاهده‌پذیر است ولی کنترل‌پذیر نیست.

(۴) سیستم مشاهده‌پذیر است ولی در مورد کنترل‌پذیری آن نمی‌توان اظهارنظر نمود.

۳۷- سیستم با معادلات حالت  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$  را در نظر بگیرید که در آن بردار حالت،  $u$  ورودی و  $y$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x$$

خروجی است. کدام یک از گزینه‌های داده شده، بهترین انتخاب برای حالت اولیه  $x_0$  است تا پاسخ حالت بدون ورودی سیستم ( $u = 0$ ) سریع‌ترین رفتار را داشته باشد؟

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

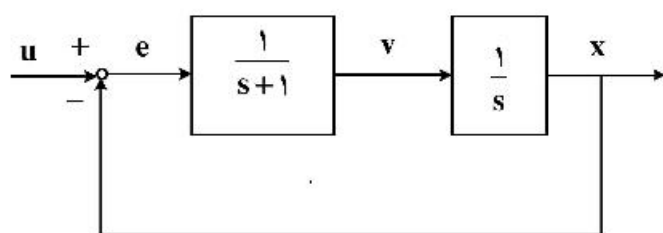
۳۸- در سیستم اصلی نشان داده شده در شکل برای اندازه‌گیری سرعت  $v$  از یک مشاهده‌گر رسته کامل استفاده می‌شود. در صورتی که قطب‌های مشاهده‌گر در  $-3$ ،  $-2$  قرار داشته باشد، با در نظر گرفتن معادلات داده شده، بهره مشاهده‌گر

$L$  کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

$$\dot{z} = Az + bu, y = c^T z \quad z = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + bu + L(y - \hat{y})$$

$$\hat{y} = c\hat{z} \quad L = ?$$



$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

۳۹- با توجه به نمایش فضای حالت سیستم زیر، با ورودی صفر و به‌ازای شرایط اولیه  $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  کدام گزینه درست است؟

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$3x_1(t) - x_2(t) = 1 \quad (1)$$

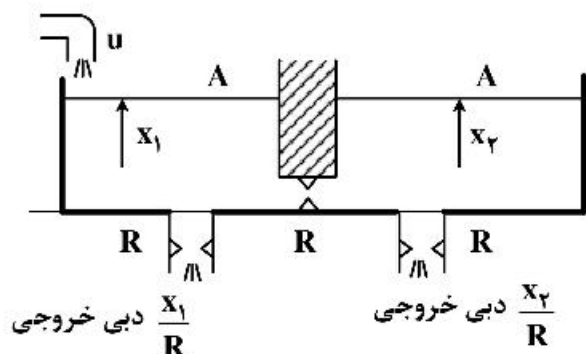
$$-3x_1(t) + x_2(t) = 1 \quad (2)$$

$$3x_1(t) + x_2(t) = 1 \quad (3)$$

$$-3x_1(t) - x_2(t) = 1 \quad (4)$$

۴۰- در سیستم خطی مقابل با ورودی  $u$  (دبی به منبع  $1$ ) ارتفاع‌ها  $x_1$  و  $x_2$  سطح مقطع طرف‌ها  $A=1$  و مقاومت شیرهای خروجی و مقاومت شیر بین دو ظرف  $R=1$  است. با فرض آنکه خروجی سیستم دبی جابه‌جایی بین دو

ظرف یعنی  $y = \frac{x_1 - x_2}{R}$  باشد، تابع تبدیل بین ورودی  $u$  و خروجی  $y$  کدام است؟



$$\frac{1}{s+3} \quad (1)$$

$$\frac{1}{(s+1)(s+3)} \quad (2)$$

$$\frac{1}{s+1} \quad (3)$$

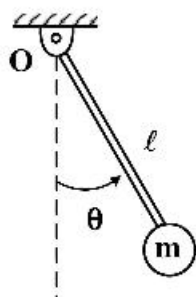
$$\frac{1}{(s+2)^2} \quad (4)$$

۴۱- آونگ ساده مقابل شامل میله صلب بدون جرم به طول  $l$ ، جرم متمرکز  $m$  در انتهای میله، حول لولای بدون اصطکاک

$O$  نوسان می‌کند. معادله حرکت به صورت  $\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0$  است، که در آن  $\omega^2 = \frac{g}{l}$  است. با فرض  $x_1 = \theta$  و

$x_2 = \dot{\theta}$  معادلات حالت سیستم خطی شده حول نقطه تعادل  $\begin{cases} x_1 = \theta = \pi \\ x_2 = \dot{\theta} = 0 \end{cases}$  به صورت  $\dot{x} = Ax$ ،  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

در می‌آید. ماتریس  $A$  کدام است؟



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

۴۲- سیستم رسته ۴ با معادلات حالت زیر داده شده که در آن  $A$  ماتریس مربع  $4 \times 4$ ،  $B$  ماتریس ستونی و  $C$  ماتریس سطری است.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

تابع تبدیل این سیستم چنین است:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 1.5}{(s + 1)(s + 2)(s + 4)(s + 6)}$$

کدام گزینه در مورد کنترل پذیری و مشاهده پذیری آن درست است؟

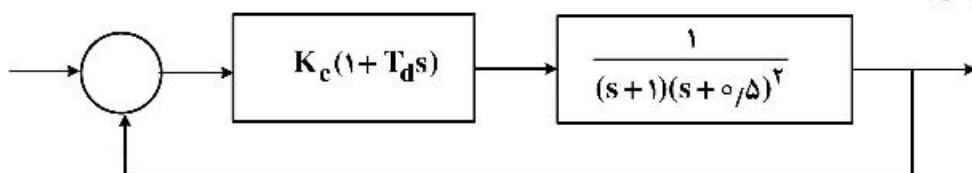
(۱) کنترل پذیر و مشاهده پذیر است.

(۲) ممکن است کنترل پذیر یا مشاهده پذیر نباشد.

(۳) ممکن است مشاهده پذیر نباشد ولی کنترل پذیر است.

(۴) ممکن است کنترل پذیر نباشد ولی مشاهده پذیر است.

۴۳- در سیستم مقابل پارامتر  $T_d$  در کنترل کننده در چه محدوده‌ای باشد که سیستم مدار بسته به ازای همه مقادیر مثبت  $K_c$  همواره پایدار باشد؟



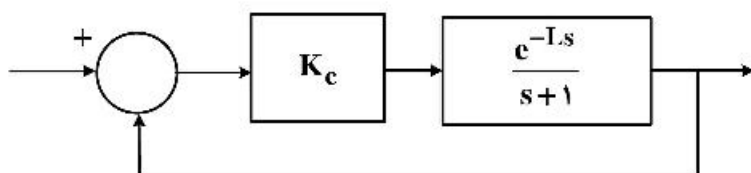
(۱)  $T_d > 0$

(۲)  $0 < T_d < 5$

(۳)  $0 < T_d < 2$

(۴)  $T_d > 0.5$

۴۴- در سیستم مقابل با فرض  $K_c = 2$  زمان تأخیر  $L$  در سیستم را طوری تعیین کنید، که حد فاز (Phase margin) مساوی  $30^\circ$  شود؟



(۱)  $\frac{\pi}{3}$

(۲)  $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

(۳)  $\frac{2\pi}{3}$

(۴)  $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

۴۵- در سیستم خطی  $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$  که در آن  $A$  ماتریس مربع  $n \times n$  است فرض کنید داریم  $A = A_1 + A_2$  که  $A_1$  و  $A_2$

$A_2$  نیز ماتریس‌های مربع  $n \times n$  هستند. در چه صورتی رابطه  $e^{At} = e^{A_1 t} \cdot e^{A_2 t}$  همواره درست است؟

(۱) فقط وقتی درست است که  $A_1$  و  $A_2$  ماتریس قطری باشند.

(۲) فقط وقتی درست است که مقادیر ویژه  $A$  حقیقی باشند.

(۳) فقط وقتی درست است که  $A_1 A_2 = A_2 A_1$  باشد.

(۴) در همه حالتها درست است.